Треугольник Паскаля, таблица Тартальи, один случай обобщения треугольника Паскаля и его наглядные интерпретации.

С.М.Гаврилюк, О.А.Горин

Оглавление.

1.Введение.

В этой работе обращено внимание на то, что числа треугольника Паскаля могут рассматриваться совместно с другими числами нижней полуплоскости, которые оказываются нулями. То есть, для получения чисел используется строка, состоящая из нулей и единицы и правило образования чисел треугольника Паскаля. Ограничение на числа за пределами рядов единиц, таким образом, снимается. Рассмотрен вопрос о самой верхней единице треугольника Паскаля, в том числе, с точки зрения геометрической интерпретации. Сама эта интерпретация возможна, если на вершине треугольника стоит единица. Суть её в том, что, как оказалось, числа треугольника Паскаля совпадают с количествами структур у n-мерного тетраэдра (и, вообще, у n-мерного треугольника). Набор чисел n-ой строки треугольника

Паскаля как раз и представляет собой количества этих структур у (n-1)-мерного тетраэдра, начиная с наинизшей. Как оказалось, у таких таблично заданных тетраэдров, по сравнению с общепринятыми геометрическими, есть структурный элемент, предшествующий вершине и есть ещё один тетраэдр - элементарный тетраэдр - предшествующий нульмерному тетраэдру. Как оказалось, элементарный тетраэдр не противоречит представлению и о геометрическом тетраэдре. Более того, признание существования геометрического элементарного тетраэдра, неизобразимого, но такого же реального, как, скажем, четырёхмерный тетраэдр, позволило бы привести к логическому завершению идею о том, что структуры n-мерного тетраэдра в точности, по определённому правилу, соответствуют структурам (n-1)-мерного тетраэдра. А, именно, это объяснило бы, почему с увеличением размерности на единицу у тетраэдра появляется новая вершина. И именно эта тетраэдрическая интерпретация чисел треугольника Паскаля наводит на мысль о рассмотрении всех чисел нижней полуплоскости, а не только относящихся к треугольнику, поскольку при таком рассмотрении числа за пределами треугольника Паскаля - нули - обретают конкретный смысл.

Как оказалось, существует возможность обобщения треугольника Паскаля, являющаяся частным случаем обобщённого треугольника Паскаля (V-треугольника), в которой продолжается возможность геометрически интерпретировать строки таблицы. Так, после сопоставляемой с n-мерными тетраэдрами первой таблицы, строки второй, как оказалось, совпадают с количествами структур уже у n-мерных кубов и, следовательно, могут быть ими интерпретированы. Такая возможность выявила глубокую взаимосвязь между n-мерными тетраэдрами и кубами (точнее, между (n-1)-мерным тетраэдром и n-мерным кубом), и, таким образом, оказалось, что количества их структур описываются одной и той же простой формулой. В этом случае обобщения треугольника Паскаля существуют и другие таблицы (их - бесконечное множество), строки которых, возможно, тоже могут быть сопоставлены каким-то объектам. И, хотя для них не обнаружилось аналогичной интерпретации (но, обнаружились другие), они, как оказалось, образуют систему объектов, напоминающих n-мерные многогранники. Эта система глубоко взаимосвязана, поскольку, не только параметры объектов внутри каждой таблицы связаны между собой, но и, кроме того, на множестве таблиц действуют две теоремы, связывающие параметры объектов из соседних таблиц (при этом, с одним и тем же значением величины n). Одна из теорем аналогична правилу Пуанкаре для n-мерного выпуклого многогранника (и, как его частному случаю, теореме Эйлера для трёхмерных многогранников), однако, в отличие от правила Пуанкаре (и теоремы Эйлера), она не содержит никаких чисел неясного происхождения и, более того, позволяет понять смысл чисел в правиле Пуанкаре (и теореме Эйлера).

Несмотря на то, что указанная интерпретация строк треугольника Паскаля и одного из его обобщений оказалась возможна, на сегодня, лишь в двух случаях, тем не менее, здесь будут указаны ещё две возможности интерпретации чисел и строк треугольника Паскаля и его обобщения, каждая из которых позволяет осознать нечто важное о треугольнике Паскаля и его обобщении. Одна из них - комбинаторная. Смысл её в том, что если операции с чёрными и белыми шарами представить математически, то можно наглядно раскрыть смысл и чисел треугольника Паскаля, и, в целом, чисел обобщённого треугольника Паскаля (с постоянными коэффициентами $\alpha_{n,k}, \beta_{n,k}$). В этой интерпретации интересно то, что наглядно показывается, при каком условии появляются числа треугольника Паскаля (или обобщённого треугольника Паскаля с постоянными коэффициентами $\alpha_{n,k}, \beta_{n,k}$). Для этого нужно группировать события с одинаковым соотношением шаров без учёта их возможного расположения в каждом событии, в противном случае, получится таблица, состоящая из одних единиц. Также, этот подход позволяет найти вид производящей функции для последовательности коэффициентов, составляющиих строки обобщённого треугольника Паскаля (случай постоянных коэффициентов $\alpha_{n,k}, \beta_{n,k}$). Другая интерпретация - кубическая - позволяет единым образом наглядно представить любой объект рассмотренного здесь случая обобщения треугольника Паскаля (то есть, любую строку какой-либо из таблиц) как количества структур у n-мерного куба, имеющего, к тому же, ту или иную внутреннюю структуру.

Также, затронут вопрос о другой форме расположения чисел треугольника Паскаля - таблице Тартальи. Обращается внимание на то, что в формулу, описывающую числа в таблице Тартальи, переменные (в отличие от треугольника Паскаля) входят равноправным образом. По аналогии с обобщённым треугольником Паскаля, строится обобщённаю таблица Тартальи.

2. Треугольник Паскаля.

2.1. Форма представления чисел в треугольнике Паскаля и правило образования чисел в нём.

Треугольник Паскаля - это числовая таблица, где каждое число есть сумма двух вышележащих чисел:

k / n	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	...
$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3	3	1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
$n=5$	1	5	10	10	5	1		
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Таблица 1.

Обычно треугольник Паскаля представляют равнобедренным, так что каждое число располагается как бы между двумя вышележащими числами. Но, для преследуемых здесь целей, более подходит такая форма, как в таблице 1, которая называется треугольником Паскаля в прямоугольной форме, или просто прямоугольным треугольником Паскаля ([1], стр18). Как видно из таблицы 1, единицы по бокам треугольника не являются суммами вышележащих чисел и, как правило, их задают как граничные условия. Однако, в целях более целостного восприятия излагаемых здесь вопросов, мы применим другой подход и будем рассматривать все числа нижней полуплоскости, которые за пределами треугольника Паскаля оказываются нулями, несущими смысловую нагрузку. В этом случае оговариваются лишь числа верхней строки нижней полуплоскости, которые обычно выбираются рядом нулей с одной единицей. Все остальные числа треугольника Паскаля и всей нижней полуплоскости будут определяться по правилу образования чисел в треугольнике Паскаля как сумма двух вышележащих чисел. В итоге, получим такую форму треугольника Паскаля:

k / n	$k=-1$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	...
$n=0$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	...
$n=1$	0	1	1	0	0	0	0	0	0	...
$n=2$	0	1	2	1	0	0	0	0	0	...
$n=3$	0	1	3	3	1	0	0	0	0	...
$n=4$	0	1	4	6	4	1	0	0	0	...
$n=5$	0	1	5	10	10	5	1	0	0	...
$n=6$	0	1	6	15	20	15	6	1	0	...
$n=7$	0	1	7	21	35	35	21	7	1	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Таблица 2.

Такую форму треугольника Паскаля, распространённого на всю нижнюю полуплоскость, можно назвать полуплоскостью Паскаля.

Таким образом, открытым остаётся вопрос лишь о происхождении единицы на вершине треугольника Паскаля. Но относительно неё можно сказать следующее: это число может быть или нулём, или единицей, или любым действительным числом a. Если это число окажется нулём, то, по правилу образования чисел в треугольнике Паскаля, все нижележащие числа окажутся нулями. Если единицей, то получим треугольник Паскаля. А если число на вершине треугольника будет произвольным действительным числом a, то, применяя правило образования чисел в треугольнике Паскаля, увидим, что все числа треугольника получают дополнительный множитель a, что никак не изменит соотношений между числами треугольника и не приведёт в такой таблице к каким-либо новым свойствам. Поэтому, верхнюю ячейку треугольника Паскаля достаточно заполнить единицей.

Свойства треугольника Паскаля подробно исследованы, также исследованы различные формы его обобщений, о чём можно узнать, например, в монографии [2].

Представим правило образования чисел в полуплоскости Паскаля математически. Если число в ячейке с номером (n, k) обозначить через P_n^k, то правило образования чисел в полуплоскости Паскаля можно записать так:

$$P_n^k = P_{n-1}^{k-1} + P_{n-1}^k \qquad (1)$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$, $P_0^0 = 1$, $P_0^k = 0$, если $k \neq 0$.

2.2. Интерпретация чисел треугольника Паскаля биномиальными коэффициентами.

Известно, что числа треугольника Паскаля P_n^k совпадают с коэффициентам C_n^k в разложении бинома Ньютона $(1+x)^n$:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k \qquad (2)$$

где $\in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$, а величина C_n^k (часто называемая биномиальным коэффициентом) равна:

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (3)$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$.

Выражение $(1+x)^n$ называется производящей функцией для последовательности коэффициентов C_n^0, C_n^1, C_n^2, $\ldots$. Таким образом, формула для определения чисел в треугольнике Паскаля (а также во всей полуплоскости Паскаля) будет такой:

$$P_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (4)$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Как видно, ограничение на значения величины k, имеющееся в формуле **(03)**, здесь снято, поскольку, что касается значений P_n^k за пределами треугольника Паскаля, где величины k и $n-k$ могут принимать целые отрицательные значения, то мы можем не оговаривать их равными нулю в этих областях, а обратиться к тому факту, что Эйлер, введя понятие гамма-функции, продолжил таким образом понятие факториала в область комплексных значений переменной, так что факториал от целого отрицательного числа можно считать существующим и равным бесконечности а, соответственно, значение P_n^k - нулю.

2.3. Интерпретация чисел треугольника Паскаля.

Далее мы продолжим рассматривать вопрос о совпадении чисел треугольника Паскаля с биномиальными коэффициентами. Сейчас обратимся к ещё одной интерпретации чисел в треугольнике Паскаля, которая состоит в том, что они совпадают с количествами структур у n-мерного тетраэдра.

Пусть имеется n-мерный тетраэдр $T_n (n \in \mathbb{Z}, n \geq 0)$. Он состоит из структур - вершин, рёбер, граней, объёмов и так далее. Количество структур номера k назовём k-ым параметром тетраэдра T_n и обозначим через T_n^k $(n \in \mathbb{Z}, n \geq 0, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0)$. И, таким образом, T_n^0 будет пока обозначать количество вершин у n-мерного тетраэдра, T_n^1 - количество рёбер, T_n^2 - количество граней, и так далее. Иногда, чтобы не вводить дополнительных обозначений, величина T_n^k будет обозначать не только количество k-ых структур у объекта T_n, но и сами эти структуры.

Поставим задачу вычисления значений T_n^k.

Предположим, что значения параметров T_n^k тетраэдра T_n не случайны, а как-то зависят от значений параметров тетраэдров меньших размерностей. Эту зависимость обнаружим на примере развития двумерного тетраэдра T_2 (равностороннего треугольника) в трёхмерный - T_3 (рисунок 1):

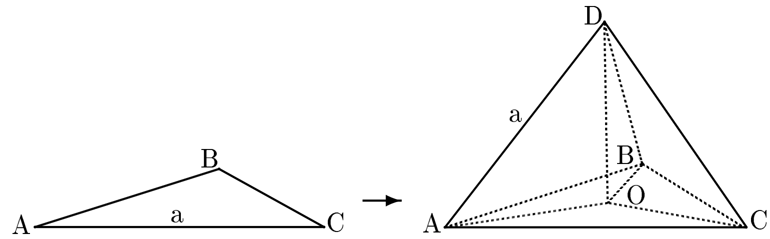


Рисунок 1.

Если через точку O, равноудалённую от вершин треугольника ABC, провести перпендикуляр к плоскости треугольника и на нём взять точку D так, чтобы расстояния AD, BD, CD были бы равны длине стороны треугольника ABC a и соединить точку D с вершинами A, B, C, то получим трёхмерный тетраэдр T_3. Чтобы понять, как из структур T_2 получаются структуры T_3, будем мысленно непрерывно перемещать $\triangle ABC$ в направлении точки D, уменьшая его площадь, вплоть до точки. Очевидно, что из точки A при этом образуется ребро AD, из ребра AC - грань ACD, из грани ABC - трёхмерный объём ABCD. Таким образом, все структуры тетраэдра ABCD имеют свой прототип в структурах треугольника ABC, за исключением вершины D. Причём, каждая структура треугольника ABC продолжает саму себя в тетераэдре ABCD и, в дополнение к этому, создаёт в нём ещё одну структуру на единицу большей размерности. Следовательно, правило, связывающее количество структур тетраэдров соседних размерностей T_{n-1} и T_n, если оно универсально, должно быть таким:

$$T_n^k = T_{n-1}^{k-1} + T_{n-1}^k \tag{5}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$.

Как видим, оно совпадает с правилом **(01)** образования чисел в треугольнике Паскаля. Значит ли это, что числа в треугольнике Паскаля совпадают с количествами структур у n-мерного тетраэдра? - Нет, не значит, ведь мы пока не знаем, какова структура самого первого в ряду тетраэдров, а для совпадения нужно, чтобы у него был только один структурный элемент. Поэтому, найдём структурный состав самого первого тетраэдра.

Однако в начале ответим на вопрос о происхождении вершины D в тетраэдре ABCD при "превращении"в него треугольника ABC, ведь в структурах треугольника ABC прототипа для неё мы не обнаружили. Количество вершин тетраэдра ABCD T_3^0 связано с количеством вершин треугольника ABC T_2^0, очевидно, следующим образом:

$$T_3^0 = 1 + T_2^0 \tag{6}$$

С другой стороны, есть правило **(05)**, связывающее количества структур тетраэдров соседних размерностей и не понятно, почему оно не должно относиться также и к вершинам как к структурным элементам тетраэдров? Более того, если считать, что правило **(05)** не распространяется на вершины тетраэдров, то тогда становится совершенно непонятным происхождение единицы в формуле **(06)**. Но, смысл этой единицы, в свете правила **(05)**, напрашивается сам собой - она представляет собой элемент T_2^{-1}, благодаря которому в нашей "эволюционной"модели в тетраэдре ABCD и появляется вершина D, так что мы можем говорить о существовании ещё одного структурного элемента T_2^{-1} у двумерного тетраэдра T_2 (и у треугольника вообще), который предшествует вершине T_2^0 также, как вершина T_2^0 предшествует рёбру T_2^1.

Зададимся вопросом, а какими будут значения величин T_n^{-1} у тетраэдров других размерностей?

Для этого обобщим способ образования тетраэдра из треугольника на случай произвольной размерности n. Можно предложить такой способ: пусть есть (n–1)-мерный тетраэдр T_{n-1} в (n–1)-мерном пространстве. Из этого пространства, из точки, равноудалённой от вершин тетраэдра T_{n-1}, проведём перпендикуляр к пространству, в котором расположен тетраэдр T_{n-1} и на нём выберем точку так, чтобы расстояния от неё до вершин тетраэдра T_{n-1} оказались бы равны длине стороны тетраэдра T_{n-1}. Соединим эту точку с вершинами тетраэдра T_{n-1}. Получим n-мерный тетраэдр T_n.

Перпендикуляр к пространству, в котором расположен тетраэдрT_{n-1}, мы можем построить, проведя перпендикуляр к осям ортогонального базиса $(n-1)-$ мерного пространства, в котором расположен тетраэдр T_{n-1}. Но, с другой стороны, мы можем выбрать любую точку в направлении нового измерения и соединить её с вершинами T_{n-1}. Полученный n-мерный треугольник, в рассматриваемом здесь смысле, ничем не будет отличаться от n-мерного тетраэдра, ведь этот подход ничего не говорит о длинах рёбер, площадях граней, величинах объёмов, равенстве углов и так далее. Здесь учитывается лишь факт наличия структуры, поэтому, всё сказанное здесь о структуре n-мерного тетраэдра в равной мере относится к любому n-мерному треугольнику.

Таким образом, способ образования n-мерного тетраэдра T_n из (n-1)-мерного таков, что в тетраэдре T_n по сравнению с тетраэдром T_{n-1} добавляется ещё одна вершина, и можем записать:

$$T_n^0 = 1 + T_{n-1}^0 \tag{7}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ и, учитывая **(05)**:

$$T_{n-1}^{-1} = 1 \tag{8}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

Есть ли у n-мерного тетраэдра структуры ещё более фундаментальные, чем те, которым соответствует величина T_n^{-1}? Оказывается, нет. Действительно, на основании **(05)** напишем:

$$T_n^{-1} = T_{n-1}^{-2} + T_{n-1}^{-1} \tag{9}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

Но, $T_n^{-1} = T_{n-1}^{-1} = 1$, откуда следует, что

$$T_{n-1}^{-2} = 0 \tag{10}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

Аналогично, $T_{n-1}^{-3} = 0$, $T_{n-1}^{-4} = 0$ и так далее.

Естественно, что элемент T_{n-1}^{-1} неизобразим, ведь уже вершина представляется точкой и чем представить ещё более простой элемент? И даже понятие месторасположения в отношении него применить непротиворечиво пока не удалось. Но, благодаря ему попытка объяснить имеющиеся у n-мерного тетраэдра структуры развитием их из структур (n-1)-мерного тетраэдра согласно правилу **(05)** получила законченную форму: теперь мы можем сказать, что дополнительная вершина у тетраэдра T_n по сравнению с тетраэдром T_{n-1} "развивается"из элемента T_{n-1}^{-1}. Если бы величина T_{n-1}^{-1} оказалась равна, скажем, пяти, то это привело бы у тетраэдра T_n к появлению ещё пяти вершин по сравнению с тетраэдром T_{n-1}. А вот то, что в любом тетраэдре T_n имеется лишь один элемент T_n^{-1}, с позиции правила **(05)**, говорит о том, что элемент T_n^{-1} не возникает из какого-либо другого элемента, а в единичном количестве присутствуя в самом первом тетраэдре, продолжает сам себя из тетраэдра в тетраэдр.

Продолжим поиски структуры самого первого тетраэдра.

Будем исходить из того, что нам известны количества структур у тетраэдра T_2. Можем ли мы узнать, сколько и каких структур должно быть у T_1 (у одномерного тетраэдра)? Например, сколько у него вершин?

Из (05) следует:

$$T_2^0 = T_1^{-1} + T_1^0$$

Так как $T_2^0 = 3$, $T_1^{-1} = 1$, то отсюда следует:

$$T_1^0 = 2$$

То есть, у одномерного тетраэдра есть две вершины. А, сколько у него рёбер? Аналогично, из (05) получаем:

$$T_2^1 = T_1^1 + T_1^0$$

$$3 = T_1^0 + T_1^1$$

$$T_1^1 = 1$$

То есть, у одномерного тетраэдра есть одно ребро, две вершины и один элемент, представляемый величиной T_1^{-1}. Понятно, что такой объект можно изобразить отрезком.

А, что такое нульмерный тетраэдр? Из **(05)** следует:

$$T_1^0 = T_0^{-1} + T_0^0$$

$$2 = 1 + T_0^0$$

$$T_0^0 = 1 \tag{11}$$

То есть, у нульмерного тетраэдра есть одна вершина и один элемент, выражаемый величиной T_0^{-1}. Такой объект можно изобразить в виде точки.

Но, является ли нульмерный тетраэдр первым тетраэдром? Для ответа на этот вопрос, нужно выяснить следующее: существует ли принципиальная возможность существования объекта T_{-1} такого, чтобы, с одной стороны, он представлялся только положительными целыми числами или нулями, чтобы можно было говорить о количествах его структур, а, с другой - чтобы при применении к нему правила **(05)** мы получили бы объект T_0? (Не видя в настоящий момент смысла говорить об объектах с отрицательной размерностью, мы, тем не менее, можем рассматривать величины T_n^k со значениями $n < 0, k < 0$, как решения уравнения **(05)**, которые пронумерованы величинами n и k. В случае, если окажется, что у уравнения **(05)** есть решения T_n^k, в которых значения n и (или) k отрицательны, а сами величины T_n^k представлены целыми положительными числами, так что их можно интерпретировать как количество структур объекта T_n, нумерация может быть изменена, так что размерности объекта будет соответствовать уже не n, а, например, $(n-1)$). Запишем связь между параметрами T_0 и T_{-1} с помощью **(05)**:

$$T_0^{-2} = T_{-1}^{-3} + T_{-1}^{-2}$$

$$T_0^{-1} = T_{-1}^{-2} + T_{-1}^{-1}$$

$$T_0^0 = T_{-1}^{-1} + T_{-1}^0$$

Или, учитывая**(08)**, **(10)** и **(11)**:

$$0 = T_{-1}^{-3} + T_{-1}^{-2} \tag{12}$$

$$1 = T_{-1}^{-2} + T_{-1}^{-1} \tag{13}$$

$$1 = T_{-1}^{-1} + T_{-1}^0$$

Уравнение **(13)** в целых неотрицательных числах имеет два решения: $T_{-1}^{-1} = 1$, $T_{-1}^{-2} = 0$ и $T_{-1}^{-1} = 0$, $T_{-1}^{-2} = 1$. Второе решение нам не подойдёт, так как в этом случае уравнение **(12)** в целых неотрицательных числах решений не имеет. Первое решение удовлетворяет всем трём уравнениям. Все те уравнения, которые ещё могут быть написаны для параметров T_0 и T_{-1}, исходя из **(05)**, (например, $T_0^1 = T_{-1}^0 + T_{-1}^1$) будут выполняться автоматически, поскольку величины, входяшие в них или уже являются нулевыми (как, например, T_0^1), или мы можем выбрать их равными нулю (как T_{-1}^1 и T_{-1}^0)).

Таким образом, опираясь на связь параметров у тетраэдров соседних размерностей, мы обнаружили возможность для существования тетраэдра T_{-1}, предшествующего нульмерному тетраэдру T_0, который может состоять из одного структурного элемента T_{-1}^{-1}. А, вот, тетраэдра, предшествующего T_{-1}, не существует, но, поскольку этот вопрос решён в более общем виде, сейчас мы примем это как факт и позже обоснуем.

Итак, собирая вместе все данные, полученные о тетраэдрах и, пользуясь, далее, выражением **(05)**, получим таблицу 1 Приложения. Как видно из неё, первый и самый простой структурный элемент тетраэдров T_n^{-1} совпадает с первым тетраэдром T_{-1}. Заметим, что, в целом, k-мерный тетраэдр T_k и структурный элемент n-мерного тетраэдра T_n^k - не одно и то же. Например, ребро n-мерного тетраэдра T_n^1 не есть одномерный тетраэдр $_1$, ведь, одномерный тетраэдр состоит из одного ребра, двух вершин и элемента T_1^{-1}, а ребро - только из ребра. Но, тетраэдр T_{-1} состоит из единственного структурного элемента T_1^{-1} и потому с ним совпадает. Этот самый простой из тетраэдров, а, также, его единственный структурный элемент, можно назвать элементарным тетраэдром.

Заметим, что в таблице 1 Приложения мы произвели переобозначение: $k \to k+1$, $n \to n+1$, ведь, когда мы вводили нумерацию тетраэдров и элементов их структур с помощью чисел n и k, мы ничего ещё не знали об элементарном тетраэдре, так что с его появлением эти величины ушли в область отрицательных значений. С точки зрения совпадения нумераций чисел треугольника Паскаля и структурных элементов тетраэдров, а также в целях придания наиболее простого вида описывающей количество структур тетраэдров формуле, нумерацию следует начать с нуля. Таким образом, величина T_0 обозначает элементарный тетраэдр, T_1 - нульмерный, T_2 - одномерный, а величина T_n обозначает $(n-1)$-мерный тетраэдр. Как видно, таблица тетраэдров полностью совпала с треугольником Паскаля, что явилось следствием правила **(05)**, а также того, что у самого первого из тетраэдров T_0 есть лишь один структурный элемент $T_0^0 = 1$ ($T_0^k = 0$, где $k \neq 0$).

Теперь мы можем написать формулу для чисел таблицы треугольников - она совпадает с формулой для чисел треугольника Паскаля и, следовательно, выглядит так:

$$T_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (14)$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Или так:

$$T_n^k = C_n^k \qquad (15)$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Здесь мы расширили рамки нумерации по величине k, поскольку, рассматривая значения T_n^k за предлами треугольника Паскаля, мы также можем наделить их геометрическим смыслом. Равенство нулю значений T_n^k при $k < 0$ означает, что у тетраэдров нет структур, предшествующих T_n^0. А равенство нулю значений T_n^k при $k > n$ означает, что у тетраэдра T_n нет структур размерностью больше $(n-1)$.

В таблице 1 Приложения приведены также правила, позволяющие лучше понять как структуру отдельного n-мерного тетраэдра, так и отличие тетраэдров соседствующих размерностей друг от друга.

3. Таблица Тартальи и интепретация чисел в ней.

3.1. Таблица Тартальи.

Посмотрим на треугольник Паскаля (таблица 1). Можно заметить, что числа в его столбцах и строках меняются по-разному, вследствие чего в выражение **(04)** величины n и k входят неравноправным образом. Однако, если бы мы выбрали две переменные, например, m и l, каждая из которых изменялась бы от ячейки к ячейке вдоль одного из рядов единиц при неизменной другой переменной, мы бы получили ещё один случай расположения чисел треугольника Паскаля. Такая таблица чисел называется таблицей Тартальи:

l / m	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$	$l=6$	$\dots$
$m=0$	1	1	1	1	1	1	1	$\dots$
$m=1$	1	2	3	4	5	6	7	$\dots$
$m=2$	1	3	6	10	15	21	28	$\dots$
$m=3$	1	4	10	20	35	56	84	$\dots$
$m=4$	1	5	15	35	70	126	210	$\dots$
$m=5$	1	6	21	56	126	252	462	$\dots$
$m=6$	1	7	28	84	210	462	924	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Таблица 3.

Примечательно, что в такой записи числа таблицы стали симметричны относительно диагонали, и число любой строки является разностью расположенных прямо под ним двух соседних чисел нижележащей строки (также и для столбцов):

$$\varphi(m,l) = f(m,l-1) + f(m-1,l) \tag{16}$$

где $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$, $l \in \mathbb{Z}$, $l \geq 1$, $f(0,0) = 1$, $f(m,0) = 1$, $f(0,l) = 1$.

Обнаруживая связь между переменными величинами (n,k) и (m,l) и делая, соответственно, замену переменных в выражении **(04)**:

$$\begin{aligned} m &= n - k \\ l &= k \end{aligned} \tag{17}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, $l \in \mathbb{Z}$, $l \geq 0$, получим формулу для нахождения чисел в таблице Тартальи:

$$\varphi(m,l) = \frac{(m+l)!}{m! \cdot l!} \tag{18}$$

где $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, $l \in \mathbb{Z}$, $l \geq 0$.

В выражении **(18)**, в отличие от **(04)**, видим, что переменные m и l равноправны.

3.2. Интерпретация чисел в таблице Тартальи.

Оказывается, что числа в строках таблицы Тартальи (также и для столбцов) представляют собой треугольные числа и их обобщения на случай пространств всех размерностей ([1], стр.14). В строке с $m = 2$ расположены треугольные числа, то есть количество кругов (двумерных шаров, $m = 2$) которые необходимо взять, чтобы из них можно было бы сложить правильный двумерный треугольник, сторону которого составляли бы $l + 1$ кругов:

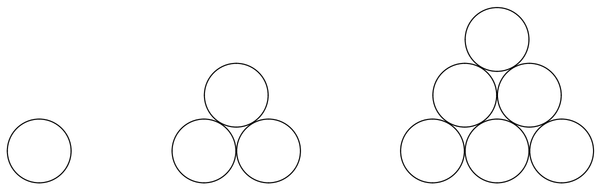


Рисунок 2.

В общем случае, число $\varphi(m,l)$ представляет собой число m-мерного треугольника, то есть, количество m-мерных шаров из которых можно сложить правильный m-мерный треугольник вдоль стороны которго будет расположено $l{+}1$ m-мерных шаров. В случае одномерного пространства одномерными шарами являются отрезки, а одномерным треугольником, сложенным из них - последовательность, состоящая из отрезков. Так, $\varphi(1,0) = 1$ символизирует одномерный треугольник, сложенный из одного отрезка, $\varphi(1,1) = 2$ - из двух и так далее.

Нульмерный треугольник и нульмерный шар, также как и любой нульмерный объект, можно представить точкой. Строка $\varphi(0,l)$, состоящая из единиц, может в данном случае рассматриваться как наглядная демонстрация свойств этого объекта. Во-первых, поскольку значение $\varphi(0,0)$ единица, а не нуль, то нульмерный шар, определённо, существует и представим в виде точки. А, во-вторых, поскольку $\varphi(0,l)$ равно тоже единице, а не нулю, то существует и нульмерный треугольник, сложенный из l нульмерных шаров так, что общее количество нульмерных шаров, составляющих нульмерный треугольник равно единице. Такое возможно благодаря свойствам нульмерного объекта - точки.

4. Обобщённый треугольник Паскаля.

4.1. Представление об обобщённом треугольнике Паскаля.

Обобщённым треугольником Паскаля (V-треугольником) называем треугольную таблицу, элементы которой удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$V(n,k) = \alpha_{n,k-1}V(n-1,k-1) + \beta_{n,k}V(n-1,k) \tag{19}$$

с граничными условиями $V(0,0) = V_0$, $V(n,k) = 0$, если $\min(n,k,n-k) < 0$ ([2], стр. 36). (Поскольку здесь рассматриваются и отрицательные значения n и k, то можно говорить также об обобщённой плоскости Паскаля).

Все элементы с фиксированным (равным n) первым индексом составляют n-строку V-треугольника. Число V_0, стоящее в вершине (нулевой строке) обобщённого треугольника Паскаля, оговаривается особо; во многих случаях можно считать $V_0 = 1$. Величины $\alpha_{n,k}$ и $\beta_{n,k}$, фигурирующие в соотношении **(19)**, называют весовыми коэффициентами ([2], стр. 36-37).

Если в соотношении **(19)** при $V_0 = 1$ положить $\alpha_{n,k} = \beta_{n,k} = 1$, $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$, тогда **(19)** совпадёт с **(01)**, то есть имеем обычный треугольник Паскаля ([2], стр37).

Соотношение **(19)** при $V_0 = 1$ и $\alpha_{n,k} = \alpha$, $\beta_{n,k} = \beta$, $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$ даёт ([2], стр37):

$$V(n,k) = C_n^k \cdot \alpha^k \beta^{n-k} \tag{20}$$

Этот частный случай также называется обобщённым треугольником Паскаля ([2], стр37).

4.2. Частный случай обобщённого треугольника Паскаля.

Изменим обозначение величины $V(n,k)$ на $V_{s,n}^k$, учитывая в значениях V как неравноправность величин n и k, так и величину s (смысл которой сейчас станет понятным) и расширим область допустимых значений величины k. Пусть $V_{s,0}^0 = 1$, $V_{s,0}^k = 0$, если $k \neq 0$ и в выражении **(19)** $\alpha_{n,k} = 1$, $\beta_{n,k} = s$, $s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Получим выражение:

$$V_{s,n}^k = V_{s,n-1}^{k-1} + s \cdot V_{s,n-1}^k \tag{21}$$

Поскольку величина s может принимать различные значения, то получаем множество числовых таблиц для величин $V_{s,n}^k$, свою для каждого значения s. В Приложении в таблицах 3 и 4 приведены значения $V_{s,n}^k$ для четырёх первых значений s. Естественно, что таблица значений $V_{1,n}^k$ совпадает с таблицей тетраэдров и треугольником Паскаля.

С учётом **(20)** формула для расчёта величин $V_{s,n}^k$ будет такой:

$$V_{s,n}^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot s^{n-k} \tag{22}$$

или такой:

$$V_{s,n}^k = C_n^k \cdot s^{n-k} \tag{23}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$, C_n^k - биномиальный коэффициент, определяемый по формуле **(03)**. Как видно, значение $V_{s,0}^0 = V_0 = 1$ также описывается формулой **(22)**.

Выражение $(1+sx)^n$, в разложении которого по степеням x появляются коэффициенты $V_{s,n}^k$, является производящей функцией для последовательности коэффициентов $V_{s,n}^0, V_{s,n}^1, V_{s,n}^2, \ldots$(немного позже будет решён вопрос о производящей функции в более общем виде и данный факт будет следовать автоматически).

5. Обобщённая таблица Тартальи.

По аналогии с обобщённым треугольником Паскаля можно ввести понятие об обобщённой таблице Тартальи, числа которой будут заданы следующим образом:

$$f(m,l) = \mu_{m,l-1} \cdot f(m,l-1) + \nu_{m-1,l} \cdot f(m-1,l) \tag{24}$$

где $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$, $l \in \mathbb{Z}$, $l \geq 1$, $\mu_{m,l} \in \mathbb{R}$, $\nu_{m,l} \in \mathbb{R}$, кроме того, выбирается $f(0,0) = 1$, $f(m,0) = 1$, $f(0,l) = 1$, но может рассматриваться обобщённая таблица Тартальи и с другими граничными значениями.

По аналогии с числовой полуплоскостью Паскаля, можно определить числовую плоскость Тартальи, если в выражении **(24)** выбрать такие ограничения на значения входящих в него величин:

$m \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$, $\mu_{m,l} \in \mathbb{R}$, $\nu_{m,l} \in \mathbb{R}$, значение $f(0,0)$ оговаривается отдельно и часто $f(0,0) = 1$, кроме того, $f(m,l) = 0$, если $\min(m,l) < 0$.

В случае, если $\mu_{m,l} = 1$ и $\nu_{m,l} = 1$, из выражения **(24)** получается правило образования таблицы Тартальи **(16)**:

В случае постоянных значений коэффициентов $\mu_{m,l} = \mu$, $\nu_{m,l} = \nu$ числа обобщённой таблицы Тартальи будут определяться выражением:

$$f(m,l) = \mu^l \nu^m \frac{(m+l)!}{m!l!} \tag{25}$$

где $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, $l \in \mathbb{Z}$, $l \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}$. Это следует из выражения **(20)** при замене переменных **(17)** и переобозначении чисел α и β числами μ и ν соответственно.

Если таблицы значений величин $V_{s,n}^k$ привести к виду таблицы Тартальи, то есть, в выражении **(22)** от переменных n и k перейти к переменным m и l, делая в выражении **(22)** замену переменных **(17)**, то получим множество таблиц величин $f_s(m,l)$ для различных значений s и выражение для $f_s(m,l)$ будет таким:

$$f_s(m,l) = s^m \frac{(m+l)!}{m!l!} \tag{26}$$

где $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, $l \in \mathbb{Z}$, $l \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$.

Как видим, в выражении **(26)** уже нет равноправия между переменными m и l, но если в выражении **(25)** окажется, что $\mu = \nu$, то равноправие между m и l будет и таблица значений $f(m,l)$ станет симметрична относительно диагонали.

6. Таблица кубов.

Вернёмся к частному случаю обобщённого треугольника Паскаля (4.2). При $s = 1$ значения $V_{1,n}^k$ образуют треугольник Паскаля и, следовательно, строки таблицы $V_{1,n}$ могут быть интерпретированы как количества структур у тетраэдров (треугольников) различной размерности. Сейчас обратимся к таблице с $s = 2$ и рассмотрим интерпретацию величин $V_{2,n}^k$ как количества структур у n-мерного куба (и вообще у n-мерного четырёхугольника). Для этого найдём количества структур (вершин, рёбер, граней и так далее) у n-мерного куба.

Пусть имеется n-мерный куб N_n, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, который состоит из различных структур - вершин, рёбер, граней, объёмов и так далее. Эти структуры будем нумеровать буквой k, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ в порядке возрастания их размерности. А обозначать количество структур номера k у n-мерного куба будем так: N_n^k. Величину N_n^k назовём параметром n-мерного куба.

Рассчитаем значения N_n^k.

Предположим, что значения параметров N_n^k n-мерного куба не случайны, а, каким-то образом, зависят от значений параметров кубов меньших размерностей. Это станет понятным, если представить себе образование n-мерного куба из (n-1)- мерного путём параллельного переноса (n-1)- мерного куба в направлении нового измерения на длину ребра a (n-1)-мерного куба.

Изобразим этот процесс на примере образования трёхмерного куба из двумерного (квадрата) (рис. 3):

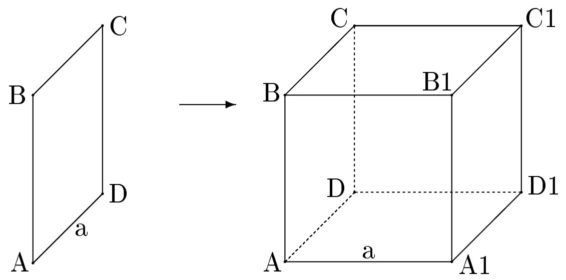


Рисунок 3.

Перемещая двумерный куб - квадрат ABCD - в направлении третьего измерения на длину a, получим образ $A_1B_1C_1D_1$ квадрата ABCD. Соединяя вершины A, B, C, D с их образами A_1, B_1, C_1, D_1 получим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, который на единицу размерности больше куба ABCD.

Теперь рассмотрим, как структуры куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ связаны со структурами куба ABCD? Например, сколько и каких структур в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ образовалось из ребра BC куба ABCD? (Учтём, что ребро не содержит вершины на концах). Очевидно, что это рёбра BC и B_1C_1, а, также, грань BCB_1C_1. Из точки A образовались точки A, A_1 и ребро AA_1, а из грани ABCD (она не содержит рёбер и вершин - это другие структуры) образовались грани ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ и трёхмерный объём $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Таким образом, из любой структуры куба ABCD в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ возникнет по две структуры той же размерности и одна структура размерности на единицу большей. Запишем этот факт:

$$N_3^k = N_2^{k-1} + 2 \cdot N_2^k \tag{27}$$

где $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$.

Поставим вопрос: а сохранится ли эта закономерность в случае произвольных значений n? Это будет так, ведь рисунок 2 можно рассматривать как схему "превращения"и двумерного куба в трёхмерный, и вообще (n-1)-мерного куба в n-мерный, так как он отражает принципиальный момент этого процесса. Тогда квадрат ABCD будет изображать (n-1)-мерный куб, его рёбра - (n-2)-мерные его структуры, его вершины - (n-3)-мерные, а какие-то структуры (n-1)-мерного куба окажутся неизображёнными, да и количество изображённых структур может быть другим, чем у (n-1)-куба, но это всё не важно, а важно то, что эта схема наглядно демонстрирует тот факт, что любой элемент (n-1)-мерного куба в процессе "образования из него"n-мерного куба создаёт в нём два аналогичных элемента и один элемент на единицу большей размерности. Таким образом, правило образования n-мерного куба из (n-1)- мерного будет таким:

$$N_n^k = N_{n-1}^{k-1} + 2 \cdot N_{n-1}^k \tag{28}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$, $N_0^0 = 1$, $N_0^k = 0$, если $k \neq 0$.

Забегая вперёд, мы сняли ограничения на значения k меньшие нуля и, следовательно, рассматриваем значения N_n^k во всей нижней полуплоскости.

Таким образом, зная параметры куба какой-либо размерности, можно определить параметры куба любой большей размерности, а также, путём составления и решения систем линейных уравнений (как это сделано для тетраэдров) - параметры любого куба меньшей размерности.

Результаты вычислений кубов до $n = 5$ представлены в таблице 2 Приложения. Эта таблица представляет собой "структуру кубов где n-я строка представляет собой набор значений N_n^k, совпадающих с количествами параметров у n-мерного куба N_n. Таким образом, формула **(28)** является "структурообразующей"для "структуры кубов".

Как видно, выражение **(28)** совпало с **(21)** при $s = 2$, следовательно, учитавая, что $N_0^0 = V_{s,0}^0 = 1$, это означает, что числа $V_{2,n}^k$ совпадают с количествами структур у n-мерного куба. Также, учитывая **(23)**, мы получаем формулу для расчёта количеств структур у n-мерного куба:

$$N_n^k = C_n^k \cdot 2^{n-k} \tag{29}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Сравнивая выражения **(15)** и **(29)**, видим, что количества структур у кубов и тетраэдров оказались тесно связаны, так, что свойства n-мерного куба можно выразить через свойства (n-1)-мерного тетраэдра:

$$N_n^k = T_n^k \cdot 2^{n-k} \tag{30}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Понятно, что эта взаимосвязь существует в силу того, что и тетраэдры, и кубы относятся к одной и той же системе объектов $V_{s,n}$, причём, тетраэдры совпадают с объектами $V_{1,n}$, а кубы - с $V_{2,n}$, и, следовательно, их свойства описываются одной и той же формулой **(23)**. В этой системе существуют и другие объекты $V_{s,n}$ со значением $s > 2$. И хотя для них пока не обнаружено таких интерпретаций, как для объектов $V_{1,n}$ и $V_{2,n}$, тем не менее они тоже могут быть наглядно интерпретированы, о чём будет сказано позже.

7. Существуют ли у "табличных кубов"структуры более элементарные, чем вершины куба? Существует ли куб, более элементарный, чем нульмерный куб?

По аналогии с тетраэдрами зададим вопрос, существуют ли структуры куба более элементарные, чем вершина куба? Оказывается, нет. Предположим обратное, то есть, что у кубов существует структура N_{n-1}^{-1}. Применим выражение **(28)** к вершинам кубов соседних размерностей, получим (правило **(28)** может рассматриваться и при отрицательных значениях k, и при значениях $k > n$, что мы заранее и сделали, выбирая $k \in \mathbb{Z}$. Если в этих областях структур у "табличных кубов"не обнаружится, это будет отражено нулевыми значениями величин N_n^k в этих областях. Если же окажется, что величины N_n^k при отрицательных значениях k могут принимать целые положительные значения, то, как и в случае с тетраэдрами, мы можем сместить нумерацию и ввести переобозначение, например, такое $N_{n-1}^{-1} \to N_{n-1}^{0}$):

$$N_n^0 = N_{n-1}^{0-1} + 2 \cdot N_{n-1}^0$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, откуда следует:

$$N_{n-1}^{0-1} = N_n^0 - 2 \cdot N_{n-1}^0 \tag{31}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

Как следует из формулы **(29)**, количество вершин у куба при увеличении размерности на единицу, возрастает в два раза, откуда, с учётом **(31)**, следует, что

$$N_{n-1}^{-1} = 0 \tag{32}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, что можно записать ещё так:

$$N_n^{-1} = 0 \tag{33}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

Это значит, что у кубов N_n, структур N_n^{-1} не существует. А, как насчёт N_n^{-2}? Опять применим выражение **(28)**, получим:

$$N_n^{-1} = N_{n-1}^{-2} + 2 \cdot N_{n-1}^{-1}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. Откуда получим:

$$N_{n-1}^{-2} = N_n^{-1} - 2 \cdot N_{n-1}^{-1}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. Но согласно **(32)** и **(33)** $N_n^{-1} = 0$ и $N_{n-1}^{-1} = 0$, следовательно

$$N_n^{-2} = 0$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Точно также, $N_n^{-3} = 0$, $N_n^{-4} = 0$ и так далее.

Таким образом, структур, более элементарных, чем вершины, у кубов N_n не существует. А существует ли куб N_{-1} необычный, то есть, более элементарный, чем нульмерный куб? Если да, то количества его структур должны должны быть связаны с количествами структур нульмерного куба согласно **(28)**:

$$N_0^0 = N_{-1}^{-1} + 2 \cdot N_{-1}^0$$

$$1 = N_{-1}^{-1} + 2 \cdot N_{-1}^0$$

Но по своему смыслу N_{-1}^0 и N_{-1}^{-1}- это количества структур определённого вида у куба, предшествующего нульмерному кубу и могут выражаться только целыми положительными числами или быть равными нулю. При таком подходе, очевидно, есть только одно решение: $N_{-1}^{-1} = 1$, $N_{-1}^0 = 0$. Но в таком случае у куба N_{-1} неизбежно возникнут и другие параметры, причём, с отрицательными значениями. Действительно, напишем уравнение **(28)** для величины N_0^{-1}, которая, согласно **(33),** равна нулю, получим:

$$N_0^{-1} = N_{-1}^{-2} + 2 \cdot N_{-1}^{-1}$$

$$0 = N_{-1}^{-2} + 2 \cdot 1$$

$$N_{-1}^{-2} = -2$$

и такую величину становится невозможно интерпретировать как количество структур у куба N_{-1}. Таким образом, возможности для существования куба N_{-1} в предполагаемом здесь смысле не существует.

8. Ограниченность структур V_s.

Продолжим рассмотрение объектов $V_{s,n}$.

Зададим вопрос, допускает ли правило **(21)** возможность дополнить какую-либо из структур V_s ненулевыми числами слева? Попытаемся найти число $V_{s,n-1}^{-1}$, которое должно располагаться в первом ряду слева от числа $V_{s,n-1}^0$ объекта $V_{s,n}$, исходя из выражения **(21)**:

$$V_{s,n}^0 = V_{s,n-1}^{-1} + s \cdot V_{s,n-1}^0 \tag{34}$$

где $s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, $V_{s,0}^0 = 1$, $V_{s,0}^k = 0$, если $k \neq 0$.

Далее, используем следствие правила **(21)** - формулу **(22)**. Представим по ней величины $V_{s,n}^0$ и $V_{s,n-1}^0$:

$$V_{s,n}^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} \cdot s^{n-0} \tag{35}$$

где $s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

$$V_{s,n}^0 = s^n$$

где $s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$.

а, также,

$$V^0_{s,n-1} = s^{n-1}$$

где $s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

И, подставляя в формулу **(34)**, получим:

$$s^n = V^{-1}_{s,n-1} + s \cdot s^{n-1}$$

где $s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, откуда следует:

$$V^{-1}_{s,n-1} = 0$$

где $s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. То есть, любое число в первом ряду слева от ряда $V^0_{s,n}$, равно нулю. Также, можно показать, что в ряду $V^{-2}_{s,n-1}$ тоже одни нули. Согласно **(21)**,

$$V^{-1}_{sn} = V^{-2}_{s,n-1} + s \cdot V^{-1}_{s,n-1}$$

$$V^{-2}_{s,n-1} = V^{-1}_{sn} - s \cdot V^{-1}_{s,n-1}$$

$$V^{-2}_{s,n-1} = 0 - s \cdot 0 = 0$$

где $s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$.

Аналогично, $V^{-3}_{s,n-1} = 0$, $V^{-4}_{s,n-1} = 0$ и так далее. Таким образом, в таблице любой структуры V_s, задаваемой правилом **(35)**, числа которой определяются согласно согласно формуле **(22)**, слева от её первого ряда V^0_s нет никаких отличных от нуля чисел. Для структур V_1 и V_2, имеющих геометрическую интерпретацию, это означает, что у n-мерных тетраэдров и кубов нет возможности для существования у них структур более элементарных, чем, соответственно, элементарный тетраэдр и вершина куба.

Что касается возможности расширения структур V_s вправо, в область, где $> n$, то, тогда в выражении **(22)** в знаменателе появится факториал от отрицательного целого числа, который равен бесконечности, из-за чего величина $V^k_{s,n}$ обратится в нуль. Для структур V_1 и V_2, с точки зрения геометрической интерпретации, это означает, что у n-мерных тетраэдров и кубов нет структур размерностью больше, чем n.

9. О распространении структур V_s в верхнюю область.

Здесь ситуация не столь однозначна, как в предыдущих рассуждениях. Существует ли возможность для существования объекта $V_{s,-1}$? Существует не только возможность, но и необходимость его существования, если смотреть на структуры V_s как на результат действия правила **(21)**. В этом смысле объект $V_{s,-1}$ не может быть представлен рядом нулей, поскольку с помощью правила **(21)** ряд нулей не создаст ненулевой объект $V_{s,0}$. Попробуем отыскать какие-то параметры объекта $V_{s,-1}$. Учитывая связь **(21)**, напишем:

$$V_{s,0}^{0} = V_{s,n-1}^{-1} + s \cdot V_{s,n-1}^{0}$$

$$1 = V_{s,n-1}^{-1} + s \cdot V_{s,n-1}^{0}$$

где $s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Понятно, что в целых положительных числах это уравнение имеет два решения:

1. $V_{1,-1}^{0} = 1$, $V_{1,-1}^{-1} = 0$.

2.$V_{s,-1}^{0} = 0$, $V_{s,-1}^{-1} = 1$, где $s \in \mathbb{N}$.

Однако в случае 1.из целых положительных чисел объект $V_{s,-1}$ построить не удаётся, это будет такой объект:

$V_{1,-1} = (\ldots, 0, 0, 1, -1, 1, -1, \ldots)$,

а при решении 2.объект $V_{s,-1}$ получится таким:

$V_{s,-1} = (\ldots, -s^3, s^2, -s, 1, 0, 0, 0, \ldots)$

и, таким образом, интерпретировать такие объекты как наборы количеств их структур становится невозможно, но в общем смысле эти объекты, а также те, которые могут быть составлены из нецелочисленных решений уравнения **(21)**, конечно, могут представлять интерес для исследования.

10. Взаимосвязи между структурами V_s.

Посмотрим на таблицы 3 и 4 Приложения и найдём сумму чисел в строке какой-либо структуры. Например, суммируем числа в пятой строке структуры V_1. Получим число 256. Но, это есть первое число в пятой строке следующей структуры - V_2. И так - для всех строк всех структур получается. Следовательно, можно сформулировать теорему.

Теорема 1.

Сумма чисел в n-ой строке какой-либо структуры V_s есть первое число в n-ой строке следующей структуры V_{s+1}:

$$V_{s+1,n}^{0} = \sum_{k=0}^{n} V_{sn}^{k} \tag{36}$$

где $s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$.

Доказательство.

(везде в доказательстве $s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$).

Представим величину $V_{s+1,n}^{0}$ по формуле **(22)**, получим:

$$V_{s+1,n}^{0} = (s+1)^n \tag{37}$$

Распишем выражение $(s+1)^n$ по формуле бинома Ньютона:

$$(s+1)^n = C_n^0 \cdot s^{n-0} + C_n^1 \cdot s^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} \cdot s^1 + C_n^n \cdot s^0$$

или сокращённо:

$$(s+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot s^{n-k}$$

где C_n^k - биномиальный коэффициент, выражаемый формулой **(03)**.

Но, выражение под знаком суммы, согласно **(23)**, есть $V_{s,n}^k$, следовательно

$$(s+1)^n = \sum_{k=0}^{n} V_{sn}^k$$

и, принимая во внимание равенство **(37)**, теорема 1 доказана.

Следствие теоремы 1 в геометрии можно сформулировать так:

Следствие. *Количество всех структурных элементов (n–1)-мерного треугольника равно количеству вершин n-мерного четырёхугольника (с учётом существования элементарного треугольника).*

Количество всех структурных элементов (n–1)-мерного треугольника на единицу меньше количества вершин n-мерного четырёхугольника (без учёта существования элементарного треугольника).

Докажем ещё один факт, относящийся к закономерностям, существующим на множестве объектов V_s. Он заключается в том, что если, например, в таблице 4 в n-ой строке взять не сумму, а сумму и разность величин V_{4n}^k ($V_{4n}^0 - V_{4n}^1 + V_{4n}^2 - V_{4n}^3 + \ldots$), то получим первое число в n-ой строке предыдущей таблицы (с $s = 3$) - V_{3n}^0. То есть, имеется теорема:

Теорема 2. *Если в n-ой строке таблицы V_s сложить все числа с чётными значениями k и $k = 0$ и из полученной суммы вычесть все числа с нечётными значениями k, то получим первое число в n-ой строке таблицы V_{s-1} - $V_{s-1,n}^0$:*

$$V_{s-1,n}^0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k V_{s,n}^k \tag{38}$$

где $s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$.

Доказательство.

(во всём доказательстве $s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$).

Представим величину $V_{s-1,n}^0$ по формуле **(22)**, получим:

$$V_{s-1,n}^0 = (s-1)^n \tag{39}$$

Представим величину $(s-1)^n$ по формуле бинома Ньютона, получим:

$$(s-1)^n = C_n^0 \cdot s^n (-1)^0 + C_n^1 \cdot s^{n-1}(-1)^1 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot s^1 (-1)^{n-1} + C_n^n \cdot s^0 (-1)^n$$

или сокращённо:

$$(s-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot s^{n-k}(-1)^k$$

где C_n^k - биномиальный коэффициент, выражаемый формулой **(03).**
Принимая во внимание **(23)**, можем записать:

$$(s-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k V_{sn}^k$$

И, учитывая равенство **(39)**, теорема 2 доказана.
Интересно следствие этой теоремы в геометрии:

Следствие 1. *Если у n-мерного треугольника сложить количества всех его структур с чётными значениями k и $k = 0$ и из полученного числа вычесть все количества его структур с нечётными значениями k, то получим ноль (с учётом существования элементарного треугольника).*

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k A_k = 0 \tag{40}$$

где A_k - количество структур (параметров) номера k у n-мерного треугольника.

Если у n-мерного треугольника сложить количества всех его структур с чётными значениями k и $k = 0$ и из полученного числа вычесть все количества его структур с нечётными значениями k, то получим единицу (без учёта существования элементарного треугольника).

Следствие 2. *Если у n-мерного четырёхугольника сложить количества всех его структур с чётными значениями k и $k = 0$ и из полученного числа вычесть все количества его структур с нечётными значениями k, то получим единицу.*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k A_k = 1 \tag{41}$$

где A_k - количество структур (параметров) номера k у n-мерного четырёхугольника.

Очевидно, что формула **(41)**, относящаяся к геометрическим объектам не настолько ясна, как формула **(38)**, описывающая табличные объекты, так как не раскрывает смысла единицы в правой части равенства **(41)**. Именно формула **(38)** позволяет понять, что единица в выражении **(41)** представляет собой количество элементарных тетраэдров у (n-1)-мерного треугольника.

Теорема 2 имеет пересечение с известной **теоремой Эйлера**[3] для многогранников: для любого выпуклого трёхмерного многогранника выполняется соотношение:

$$S + H = A + 2 \tag{42}$$

где S - количество вершин, H - количество граней, A - количество рёбер трёхмерного многогранника.

Конечно, она в полной мере должна соответствовать следствиям 1 и 2 теоремы 2, если речь идёт о трёхмерных треугольнике и четырёхугольнике. Так оно и есть. Более того, следствия 1 и 2 теоремы 2 помогают понять, почему в теореме Эйлера появилась двойка: одна из единиц, составляющих её представляет единственный трёхмерный объём, который также являтся структурой многогранника, а вторая, в случае трёхмерного треугольника, представляет собой, согласно **(38)**, количество элементарных треугольников в его структуре; в случае трёхмерного четырёхугольника единица представляет собой, согласно **(38)**, количество элементарных треугольников у двумерного треугольника. А что представляет собой одна из единиц, составляющих двойку в формуле **(42)** в случае других трёхмерных многогранников? - У нас пока нет ответа на такой вопрос, но это заставляет задуматься об эквивалентности, в каком-то смысле, трёхмерных многогранников трёхмерным треугольникам или четырёхугольникам так, что эта единица может представлять собой количество элементарных треугольников у трёх- или двумерных треугольников. Этот пример интересен тем, что, также как и в случае с появлением вершин с увеличением размерности треугольника, позволяет объяснить смысл числа 2 в теореме Эйлера и подтверждает таким образом существование элементарного треугольника.

Пуанкаре[4] обобщил формулу **(42)** на случай n-мерного выпуклого многогранника:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i A_i = 1 + (-1)^{n-1} \tag{43}$$

где A_i - количество i-мерных граней n-мерного многогранника. Знакопеременная единица в правой части равенства связана с тем, что, как и в предыдущем случае, единственный n-мерный объём n-мерного многогранника нужно считать его структурным элементом и относить в левую часть этого равенства. В отношении оставшейся единицы можно повторить то, что сказано по поводу теоремы Эйлера, но применительно к n-мерным многогранникам: в случае n-мерного треугольника, она представляет собой, согласно **(38)**, количество элементарных треугольников в его структуре; в случае n-мерного четырёхугольника единица представляет собой, согласно **(38)**, количество элементарных треугольников у (n-1)-мерного треугольника. Заметим, что в отношении n-мерных треугольников и четырёхугольников выражение **(43)** есть переписанное выражение **(38)**, только в формуле **(43)** последний член выражения под знаком суммы перенесён в правую часть равенства, из-за чего на единицу понизился предел суммирования. А в случае n-мерного треугольника и вторая единица должна быть перенесена под знак суммы, так что суммирование будет проводиться до (n+1). Чтобы лучше была видна аналогия между выражениями **(43)** и **(38)**, выражение **(43)**, помня, что n-мерный объём также является структурой n-мерного многогранника, можно записать в таком виде:

$$1 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i A_i \tag{44}$$

Вызывает интерес тот факт, что объёкты $V_{s,n}$ и многогранники подчиняются таким похожим закономерностям, как **(38)** и **(44)**. Единица в левой части равенства **(44)** заставляет задуматься о том, что все выпуклые многогранники, в каком-то смысле, эквивалентны n-мерным треугольникам или четырёхугольникам.

Система объектов $V_{s,n}$ примечательна тем, что помимо формулы **(22)**, определяющей структуру каждого объекта $V_{s,n}$, ещё существует правило **(21)**, определяющее взаимосвязь между объектами $V_{s,n}$ внутри каждой структуры V_s, а, кроме того, на их множестве действуют теоремы 1 и 2, которые устанавливают взаимосвязи между различными структурами V_s.

11. Интерпретация треугольника Паскаля с помощью чёрных и белых шаров.

Пусть у нас есть шары, например, белые и черные, в равных пропорциях, но они лежат в чёрном ящике, в котором мы их не можем видеть. Совокупность чёрных и белых шаров, где они распределены поровну, можно представить в виде $(a + b)$, а то, что мы не можем их видеть можно представить нулевой степенью n:

$$(a + b)^0 = 1$$

Пусть теперь мы можем взять наугад один шар, посмотреть его цвет и вернуть обратно в ящик. Это можно представить так:

$$(a + b)^1 = a + b$$

Левая часть этого равенства представляет собой то, что у нас есть в начале (ящик с шарами - $(a + b)$) и то, что мы с этим делаем - берём один шар (то есть, возводим $(a + b)$ в степень 1), а справа представлены все возможные события, которые мы в результате можем получить, то есть, шар может оказаться или белым (a), или чёрным (b).

Запись

$$(a + b)^2 = aa + ab + ba + bb$$

означает, что мы можем дважды осуществить предыдущую операцию, беря и возвращая шар обратно, запомнив его цвет. Справа представлены все результаты, которые могут в результате такого взятия произойти. Эта запись учитывает номера взятых шаров, и, в результате, события белый-чёрный и чёрный-белый считаются за два различных события. Конечно, при таком подходе мы никакого треугольника Паскаля и никаких биномиальных коэффициентов не получим, вернее, получим треугольник, состоящий из одних единиц. Поэтому сгруппируем комбинации взятых шаров так, чтобы учитывалось только соотношение белых и чёрных шаров в каждой комбинации, а не порядок их выпадения. В результате события ab и ba будут означать одно и то же, так что их можно считать одинаковыми событиями, то есть получим:

$$(a+b)^2 = aa + 2ab + bb$$

Коэффициенты при событиях aa, ab, bb показывают, во сколько раз чаще ожидается появление события по сравнению с событием, при котором стоит коэффициент единица. А если коэффициент при событии разделить на сумму всех коэффициентов, то получим вероятность события.

Взятие по очереди (с возвращением после каждого взятия шара в ящик) трёх шаров можно представить величиной $(a+b)^3$:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Как уже понятно, коэффициенты при возможных сочетаниях взятых шаров совпадают с биномиальными коэффициентами и числами треугольника Паскаля.

При n последовательно взятых и возвращённых назад шарах результат можно записать следующим образом:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} b^k \tag{45}$$

где C_n^k - биномиальный коэффициент, выражаемый формулой **(03)**.

Если соотношение шаров в ящике окажется не равным, а будет выражено числами α и β (например, белых шаров будет α, а чёрных - β), то такой ящик можно представить записью $(\alpha a + \beta b)$, а последовательное (с возвращением взятого шара назад) взятие из него n шаров - возведением в n-ую степень, что, как следует из формулы **(45)**, запишется так:

$$(\alpha a + \beta b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (\alpha a)^{n-k} (\beta b)^k$$

или так:

$$(\alpha a + \beta b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \alpha^{n-k} \beta^k \cdot a^{n-k} b^k$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, так как α и β могут быть не только натуральными, но любыми действительными числами, верно отражающими соотношение белых и черных шаров. Учитывая, что $(\alpha a + \beta b)^n = (\beta b + \alpha a)^n$, последнее выражение можно записать так:

$$(\alpha a + \beta b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \beta^{n-k} \alpha^k \cdot b^{n-k} a^k$$

или так:

$$(\alpha a+\beta b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \alpha^k \beta^{n-k} \cdot a^k b^{n-k} \tag{46}$$

Как видим, коэффициентами, учитывающими, как часто то или иное соотношение шаров, по сравнению с другими соотношениями, будет появляться в эксперименте, являются коэффициенты $V(n,k)=C_n^k \cdot \alpha^k \beta^{n-k}$, которые, согласно **(20)**, являются числами обобщённого треугольника Паскаля с постоянными коэффициентами. Сравнивая **(46)** с **(02)**, можно написать производящую функцию для последовательности коэффициентов $V(n,0)$, $V(n,1)$, $V(n,2)$, $\ldots$(поскольку в них продолжает сохраняться неравноправие величин n и k, присутствующее в величинах C_n^k, то приведём обозначение этих коэффициентов к соответствующему виду: $V(n,k)\to V_n^k$) :

$$(\alpha+\beta x)^n=\sum_{k=0}^{n} V_n^k \cdot x^{n-k} \tag{47}$$

где $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$, $k\in\mathbb{Z}$, $0\leq k\leq n$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$, а также в таком (более естественном с точки зрения порядка следования степеней x виде): виде:

$$(\alpha+\beta x)^n=\sum_{k=0}^{n} V_n^{n-k} \cdot x^k \tag{48}$$

где $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$, $k\in\mathbb{Z}$, $0\leq k\leq n$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$. (здесь использован такой факт: $(\alpha+\beta x)^n=(\beta x+\alpha)^n$)

Понятно, что ситуацию рассматриваемого здесь случая обобщения **(21)** можно представить ящиком, в котором на один белый шар a приходится s чёрных шаров b, а взятие n шаров из него (последовательное с возвращением шара в ящик) описать (учитывая **(20)** и **(48)**) так:

$$(a+sb)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot s^k \cdot a^{n-k} b^k \tag{49}$$

где $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 0$, $k\in\mathbb{Z}$, $0\leq k\leq n$, $s\in\mathbb{N}$, или так:

$$(a+sb)^n=\sum_{k=0}^{n} V_{s,n}^{n-k} \cdot a^{n-k} b^k \tag{50}$$

что также можно записать так (поскольку $(a+sb)^n=(sb+a)^n$) :

$$(a+sb)^n=\sum_{k=0}^{n} V_{s,n}^{k} \cdot a^k b^{n-k} \tag{51}$$

Частота выпадения события $a^k b^{n-k}$ будет представлена величиной $V_{s,n}^k$ $=C_n^k \cdot s^{n-k}$ (при необходимости она может быть нормирована, то есть, поделена на величину $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot s^{n-k}$ и представлять собой вероятность события $a^k b^{n-k}$).

Таким образом, случай нашего обобщения **(21)** моделирует ящик с белыми и чёрными шарами, где на 1 белый приходится s чёрных шаров, а величина $V_{s,n}^k$, в таком случае, представляет собой частоту выпадения события $a^k b^{n-k}$ при взятии наугад (последовательно, с возвращением взятого шара назад) n шаров.

А производящая функция для последовательности коэффициентов этого случая, как следует из **(47)** при замене $\alpha \to 1$, $\beta \to s$, следовательно, будет такой:

$$(1+sx)^n = \sum_{k=0}^{n} V_{s,n}^k \cdot x^{n-k} \tag{52}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$, $s \in \mathbb{N}$, или такой (как следует из **(48)**):

$$(1+sx)^n = \sum_{k=0}^{n} V_{s,n}^{n-k} \cdot x^k \tag{53}$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$, $s \in \mathbb{N}$.

12. Единая наглядная интерпретация объектов $V_{s,n}$.

Существует и другая возможность наглядно интерпретировать любой объект $V_{s,n}$.

Пусть n - размерность объекта $V_{s,n}$, k - номера его структурных элементов $V_{s,n}^k$, которые совпадают с их размерностью, а количество каждого из них рассчитывается по формуле **(22)**. В $V_{s,n}^k$ учитывается количество "больших"структурных элементов объекта $V_{s,n}$, смысл которых станет понятен чуть позже. Покажем, как могут быть интерпретированы объекты $V_{1,n}$. Значения величин $V_{s,n}^k$ можно рассчитать по формуле **(22)**. На рисунке 4 представлены объекты $V_{1,n}$, где n меняется от 1 до 4.

Рассмотрим объекты $V_{s,n}$ при s=1.

Понятно, что, согласно **(21)**, данный случай представляет собой ещё одну интерпретацию чисел треугольника Паскаля.

Пусть $n = 0$, тогда $V_{1,0}$ - это нульмерный объект с одним структурным элементом $V_{1,0}^0$, который мы можем изобразить точкой.

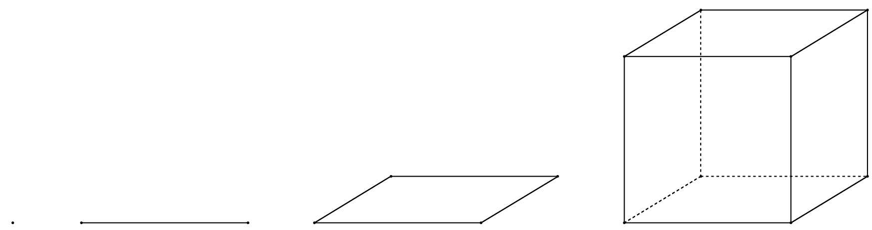
Пусть $n = 1$, тогда, согласно **(22)**, объект $V_{1,1}$ состоит из одного нульмерного объекта $V_{1,1}^0$, который можно представить точкой и одного одномерного объекта $V_{1,1}^1$, который можно представить прямой линией, ограниченной с одной стороны объектом $V_{1,1}^0$. Таким образом, объект $V_{1,1}$ можно представить лучом.

s=1	s=1	s=1	s=1
n=0	n=1	n=2	n=3

Рисунок 4.

Объект $V_{1,2}$, согласно **(22)**, состоит из одного нульмерного объекта $V^0_{1,2}$, изображённого точкой, двух одномерных объектов $V^1_{1,2}$, изображённых лучами, исходящих от объекта $V^0_{1,2}$ и ограничивающих участок плоскости, который представляет единственный объект $V^2_{1,2}$. Объект $V_{1,3}$ состоит из одного нульмерного объекта $V^0_{1,3}$ изображённого точкой, трёх одномерных объектов $V^1_{1,3}$, изображённых тремя лучами, исходящих из точки, трёх двумерных объектов $V^2_{1,3}$, представленных тремя фрагментами различных плоскостей, ограниченных лучами (объектами $V^1_{1,3}$), и одного объекта $V^3_{1,3}$, который представлен ограниченным с трёх сторон трёхмерным объёмом $V^3_{1,3}$. Далее, всё аналогично, объект $V_{1,4}$ можно предствавить точкой ($V^0_{1,4} = 1$) с исходящими из неё четырьмя лучами ($V^1_{1,4} = 4$), которые частично ограничивают шесть различных плоскостей ($V^2_{1,4} = 6$), которые, в свою очередь, частично ограничивают четыре трёхмерных объёма ($V^3_{1,4} = 4$) из различных трёхмерных пространств, которые частично ограничивают единственный четырёхмерный объём ($V^4_{1,4} = 1$). И так далее.

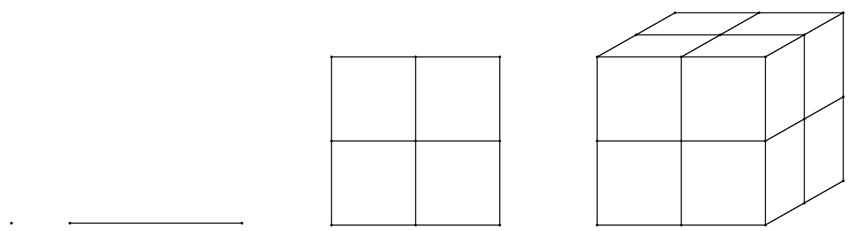
Пусть s=2 (рисунок 5). Тогда единственную нульмерную структуру $V^0_{2,0}$ объекта $V_{2,0}$ представим точкой. Объект $V_{2,1}$ представим отрезком прямой ($V^1_{2,1} = 1$), ограниченным с двух сторон точками ($V^0_{2,1} = 2$). Объект $V_{2,2}$ - плоским четырёхугольником, например, квадратом ($V^0_{2,2} = 4$, $V^1_{2,2} = 4$, $V^2_{2,2} = 1$). Объект $V_{2,3}$ - кубом ($V^0_{2,3} = 8$, $V^1_{2,3} = 12$, $V^2_{2,3} = 6$, $V^3_{2,3} = 1$, подойдёт также любой трёхмерный четырёхугольник). Объект $V_{2,4}$ - четырёхмерным четырёхугольником (например, четырёхмерным кубом), и так далее.



s=2 n=0 | s=2 n=1 | s=2 n=2 | s=2 n=3

Рисунок 5.

Объекты $V_{3,n}$ (рисунок 6).



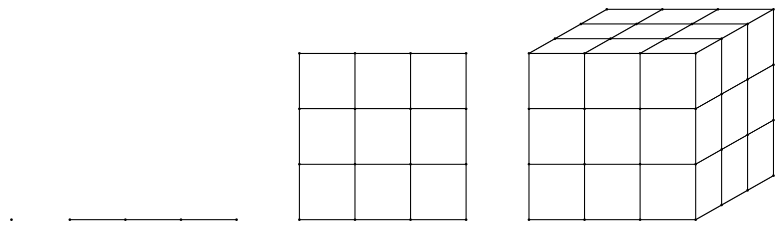
s=3 n=0 | s=3 n=1 | s=3 n=2 | s=3 n=3

Рисунок 6.

Объект $V_{3,0}$ можно изобразить точкой ($V_{3,0}^0 = 1$). Объект $V_{3,1}$ можно изобразить отрезком ($V_{3,1}^1 = 1$) с расположенными на нём тремя точками ($V_{3,1}^0 = 3$). И тут мы можем уточнить понятие "большого"структурного элемента - за элемент $V_{3,1}^1$ считается весь отрезок. Объект $V_{3,2}$ можно представить квадратом, середины сторон которого соединены отрезками. У него, как следует из таблицы 4 Приложения, есть девять "вершин"($V_{3,2}^0 = 9$), шесть "больших рёбер"($V_{3,2}^1 = 6$) и одна "большая грань"($V_{3,2}^2 = 1$). Объект $V_{3,3}$ представим в виде куба, имеющего внутреннюю структуру. У него 27 "вершин 27 "больших рёбер 9 "больших граней"и один "большой объём". Далее, объект $V_{3,4}$ можно представить четырёхмерным кубом с внутренней структурой, объект $V_{3,5}$ - пятимерным и так далее.

Объекты $V_{4,n}$ (рисунок 7).

Объект $V_{4,0}$ можно изобразить точкой ($V_{4,0}^0 = 1$, таблица 4 Приложения). Объект $V_{4,1}$ изобразим отрезком ($V_{4,1}^1 = 1$) с расположенными на нём четырьмя точками ($V_{4,1}^0 = 4$). Объект $V_{4,2}$ - квадратом, имеющим внутреннюю структуру. его составляют 16 "вершин 8 "больших рёбер"и одна "большая грань". Объект $V_{4,3}$ можно представить кубом, имеющим внутреннюю структуру и так далее.



s=4 n=0 s=4 n=1 s=4 n=2 s=4 n=3

Рисунок 7.

Таким образом, любой объект $V_{s,n}$ можно представить в виде n-мерного куба, имеющего ту или иную внутреннюю структуру.

Литература.

[1] **Успенский В.А.** Треугольник Паскаля. М.: Наука, 1979.

[2] **Кузьмин О.В.** Обобщённые пирамиды Паскаля и их приложения. Новосибирск: Наука, 2000.

[3]. **L. Euler** Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 4:140–160, 1758. Представлено Санкт-Петербургской Академии 6 апреля 1752 года.

[4]. **H. Poincaré**, Sur la généralisation d'un théorème d'Euler relatif aux polyédres, Compt. Rend. Acad. Sci., 117 (1893), 144-145; Oeuvres, Vol. XI, 6-7.

12 августа 2012 г.